Lista área II

Rotações do corpo rígido e pequenas oscilações

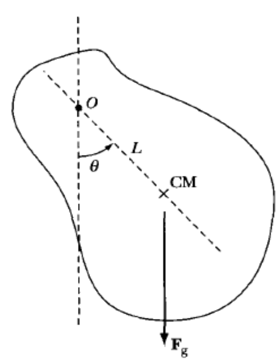
1. (a) Calcular a aceleração centrífuga devida à rotação da Terra sobre uma partícula na superfície da Terra na latitude do Equador e comparar com o valor com a aceleração gravitacional.
(b) Calcular a aceleração centrífuga devido ao movimento da Terra em torno do Sol e comparar com a aceleração devida a rotação da Terra em torno do seu eixo, calculada no item (a).

2. Se uma partícula é lançada verticalmente até uma altura *h* sobre a superfície da Terra, em um ponto de latitude λ no hemisfério sul, mostre que voltará ao solo num ponto a uma distância $\frac{4}{3}\omega \cos\lambda\sqrt{8h^3/g}$ para o leste, onde ω é a frequência angular de rotação da Terra. Despreze a resistência do ar e considere somente alturas pequenas.

3. (a) Considere uma partícula em movimento num potencial central $U(r)$. Rescreva a lagrangiana em relação a um sistema de coordenadas em rotação uniforme em relação a um sistema inercial.
(b) Discuta a conservação da energia no sistema no contexto da formulação lagrangiana.

4. Encontre a força de Coriolis sobre um carro de massa $1300\,kg$, andando a $100\,km/h$ em direção ao sul na cidade de Rio de Janeiro (latitude sul 23^o).

5. Um *pêndulo físico* ou *composto* é um corpo rígido que oscila devido ao seu próprio peso no entorno de um eixo horizontal que não passa pelo centro de massa do corpo, como mostra a figura. Para pequenas oscilações, utilize o formalismo lagrangiano para encontrar a frequência e o período das oscilações se a massa do corpo é *M* e o *raio de giração* é *k*. O raio de giração se define tal que a inércia rotacional *I* em relação ao eixo de rotação escolhido é dada por $I = Mk^2$.



6. Um sistema de três partículas possui massas m_i e coordenadas (x_1, x_2, x_3):

$$\begin{array}{rclc} m_1 & = & 3m, & (b,0,b) \\ m_2 & = & 4m, & (b,b,-b) \\ m_3 & = & 2m, & (-b,b,0) \end{array}$$

   Obter o tensor de inércia, os eixos principais e os momentos principais de inércia.

7. Calcular o tensor de inércia de uma esfera homogênea de raio *R* e massa *M*. Escolha a origem de coordenadas no centro da esfera.

8. Calcular o tensor de inércia de um cone homogêneo de massa *M*, cuja altura é *h* e cuja base tem um raio *R*. Escolha o eixo *z* ao longo do eixo de simetria do cone e a origem de coordenadas no vértice do cone. Aplique uma transformação de coordenadas tal que o centro de massa do cone fique na origem do sistema e encontre os momentos principais de inércia.

9. (Nivaldo, problema 4.4) Mostre que cada momento de inércia nunca é maior do que a soma dos outros dois.

10. Um cubo homogêneo, de aresta *l*, está inicialmente numa posição de equilíbrio instável, com uma aresta em contato com um plano horizontal. Depois se da um pequeno impulso no cubo permitindo que ele caia. Mostre que a velocidade angular do cubo quando uma das faces atinge o plano é dada por:

$$\omega^2 = A\frac{g}{l}\left(\sqrt{2}-1\right),$$

    onde $A = 3/2$ se a aresta não pode deslizar sobre o plano, e onde $A = 12/5$ se a aresta pode deslizar, mas sem atrito.

11. O **traço** de um tensor é definido pela soma dos elementos da diagonal:

$$Tr\,\mathcal{I} \equiv \sum_k \mathcal{I}_{kk}$$

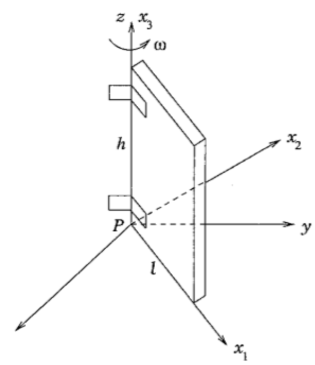
    Mostre, usando uma transformação de similaridade, que o traço é uma quantidade invariante por rotações, independente do sistema de eixos escolhidos. Em outras palavras, mostre que $Tr\,\mathcal{I} = Tr\,\mathcal{I}'$, onde $\mathcal{I}$ é o tensor em um sistema de coordenadas original e $\mathcal{I}'$ é o tensor num sistema de coordenadas rotado em relação ao original.

12. Demonstre o seguinte Lema:
    Um eixo de simetria de um corpo rígido passando pelo ponto em relação ao qual o tensor de inércia está referido é um eixo principal de inércia. Quaisquer dois eixos mutuamente ortogonais contidos num plano perpendicular ao eixo de simetria são eixos principais de inércia, e os momentos principais de inércia correspondentes são iguais entre si. (Sugestão: ver livro de Nivaldo, páginas 126-127).

13. Em relação ao problema do pião simétrico com um ponto fixo, resolva o exercício 4.9.1 do livro de Nivaldo, pág. 139.

14. (Nivaldo, problema 4.8) Uma nave espacial com simetria cilíndrica move-se no espaço sideral. Motores simetricamente situados aplicam um torque constante N_3 ao longo do eixo de simetria.
(i) Supondo que $\omega_3(0) = 0$, determine $\omega_3(t)$.
(ii) Prove que $\omega_1^2 + \omega_2^2$ é constante do movimento.
(iii) Tomando como condições iniciais $\omega_1(0) = 0$ e $\omega_2(0) = \Omega$, determine $\omega_1(t)$ e $\omega_2(t)$. Descreva o movimento executado pelo vetor velocidade angular relativamente aos eixos principais de inércia.

15. (Nivaldo, problema 4.11) Uma porta homogênea de massa m, largura l, altura h e espessura desprezível, está se fechando com velocidade angular constante ω, como mostra a figura. (i) Escolhendo o eixo z coincidente com o eixo de rotação com origem



no ponto P, encontre as componentes do vetor momento angular ao longo dos eixos x_1, x_2, x_3 fixos na porta. Sugestão: Determine as componentes do tensor de inércia relativas ao ponto P vistas do sistema cartesiano atado à porta.
(ii) Determine o vetor torque em relação ao ponto P. Sugestão: transforme as componentes de $\vec{L}$ para eixos x, y, z fixos no espaço e use $\vec{N} = d\vec{L}/dt$.

16. (Pequenas oscilações) Resolver os problemas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.6 do livro de Nivaldo.

17. Considere dois carrinhos de igual massa *m* sobre um trilho horizontal sem atrito. Os carrinhos estão conectados entre si por uma mola de constante elástica *k*.
(a) Determine a lagrangiana e encontre as frequências características do sistema. Mostre que uma das frequências características é igual a zero.
(b) Obtenha a equação de movimento para o modo normal de frequência diferente de zero, e descreva o significado físico do movimento.
(c) Faça o mesmo para o modo de frequência nula, descreva o significado físico do movimento neste caso.